Problèmes Hyperboliques et Volumes Finis.
ISITV-CEMEF

19 décembre 2003

1h30, documents autorisés, 2 pages

Exercice 1 (entropie des équations d'Euler)

On considère un gaz de masse volumique $\rho(t,x)$, d'énergie interne massique $\varepsilon(t,x)$, de pression $p(t,x)$ et de vitesse mono-dimensionnelle $u(t,x)$ solutions des équations d'Euler

$$w_t + f(w)_x = 0,$$

avec

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(\varepsilon + u^2/2) \end{bmatrix}, \quad f(w) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho(\varepsilon + u^2/2) + p)u \end{bmatrix}.$$

La loi de pression est celle d'un gaz parfait polytropique

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

En posant $\tau = 1/\rho$, l'entropie spécifique $s(\tau, \varepsilon)$ du gaz doit satisfaire

$$Tds = d\varepsilon + pd\tau,$$

où T est la température.

a) Montrer que s est solution de l'EDP du premier ordre

$$s_\tau - ps_\varepsilon = 0.$$

Montrer alors que s est une fonction arbitraire de $\varepsilon\tau^{(\gamma-1)}$.

b) Montrer que si $w(t,x)$ est une solution régulière des équations d'Euler alors s vérifie l'équation de transport de l'entropie

$$s_t + us_x = 0,$$

et la loi de conservation de l'entropie

$$(\rho s)_t + (\rho us)_x = 0.$$

c) On **admet** que si $s(\tau, \varepsilon)$ est une fonction concave de τ et ε alors $w \to -\rho s$ est une fonction convexe de w. On décide de choisir $s = C_v \ln(\varepsilon\tau^{(\gamma-1)})$ (la constante C_v est la chaleur spécifique à volume constant. Cela fixe l'échelle de température $C_vT = \varepsilon$). Montrer alors que $U(w) = -\rho s$ est une entropie de Lax pour les équations d'Euler.

d) Dans quel cas n'a-t-on plus conservation de l'entropie ?

Exercice 2 (schéma de Roe pour une équation scalaire)

Soit f une application régulière de R dans R, strictement convexe ($\forall x \in R$, $f''(x) > 0$). On considère l'équation hyperbolique

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{1}$$

a) Soient u_L et $u_R \in R$, montrer qu'il existe un unique $\overline{u}(u_L, u_R)$ compris entre u_R et u_L tel que

$$f(u_R) - f(u_L) = f'(\overline{u}(u_L, u_R))(u_R - u_L).$$

b) On considère le schéma de volumes finis

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{f(u_i^n, u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n, u_i^n)}{h} = 0,$$

où le flux numérique est celui de Roe :

$$f(a,b) = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{|f'(\overline{u}(a,b))|}{2}(b - a).$$

Montrer que

$$f(a,b) = \begin{cases} f(a) \text{ si } f'(\overline{u}(a,b)) > 0, \\ f(b) \text{ si } f'(\overline{u}(a,b)) < 0, \\ f(a) = f(b) \text{ si } f'(\overline{u}(a,b)) = 0. \end{cases}$$

c) Soient u_L et u_R tels que $u_L \neq u_R$ et $f(u_L) = f(u_R)$. Montrer que

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x \leq 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation (1)

d) Montrer que le schéma préserve la solution stationnaire construite à la question précédente. Plus précisément, montrer que si

$$u_i^0 = \begin{cases} u_L \text{ si } i \leq 0, \\ u_R \text{ si } i > 0, \end{cases}$$

alors

$$\forall i, n, \quad u_i^n = u_i^0.$$

e) En déduire sur un exemple que le schéma de Roe ne satisfait donc pas la condition d'entropie. Que faut-il faire pour l'améliorer ?

Corrigé

Exercice 1

a) Comme
$$ds = \frac{1}{T}d\varepsilon + \frac{p}{T}d\tau,$$
on a aussi
$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{p}{T}.$$
D'où le résultat. Pour montrer que $g(\varepsilon\tau^{\gamma-1})$ est solution de l'EDP, il suffit de le vérifier. On peut aussi utiliser la méthode des caractéristiques.

b) L'entropie s dépend de τ et ε donc

$$\begin{aligned} s_t + us_x &= s_\tau(\tau_t + u\tau_x) + s_\varepsilon(\varepsilon_t + u\varepsilon_x) \\ &= \frac{-p}{T\rho^2}(\rho_t + u\rho_x) + \frac{1}{T}(\varepsilon_t + u\varepsilon_x). \end{aligned} \tag{2}$$

Et une solution régulière des équations d'Euler vérifie aussi

$$\begin{aligned} &\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ &u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0, \\ &\varepsilon_t + u\varepsilon_x + \frac{p}{\rho}u_x = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

On trouve bien
$$s_t + us_x = 0.$$
En combinant avec l'équation de conservation de la masse, on trouve

$$(\rho s)_t + (\rho u s)_x = 0.$$

c) $(\varepsilon, \tau) \to \ln\varepsilon + (\gamma - 1)\ln\tau$ est bien concave, d'où le résultat. L'intérêt de ce calcul est de montrer que la notion théorique d'entropie de Lax est bien en accord avec la physique. On retrouve aussi que le choix de l'échelle de température résulte d'une convention.

d) Dans un choc, il y a croissance de l'entropie :

$$[\rho u s] \geq \sigma\, [\rho s]\,,$$

où σ est la vitesse du choc.

Exercice 2

a) l'existence résulte du théorème des accroissements finis, l'unicité de la stricte croissance de f'.

b) Immédiat (question pour comprendre les notations).

c) La solution proposée est un choc stationnaire (de vitesse $\sigma = 0$). La condition de Rankine-Hugoniot est bien satisfaite

$$\sigma(u_R - u_L) = 0 = f(u_R) - f(u_L).$$

d) D'après la question b), $f(u_L, u_R) = f(u_L) = f(u_R)$, donc $u_i^n = u_i^{n+1}$.

e) On choisit $f(u) = u^2/2$ (Burgers), $u_L = -1$ et $u_R = 1$. La condition d'entropie de Lax n'est pas vérifiée car $u_L < u_R$. Pourtant le schéma préserve ce choc stationnaire. Une amélioration possible est d'augmenter la viscosité numérique quand $f'(\overline{u}(a, b))$ est proche de 0.