

GOURIO-JEWELL Pierre-Guillaume

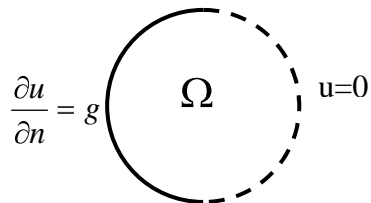
KOHN Céline

CONTROLE OPTIMAL
Application à l'équation de la chaleur

1. Présentation du problème	4
Méthode de l'état adjoint	6
Mise en place de l'algorithme	7
2. Méthode de contrôle optimal avec le temps.	8
Méthode de l'état adjoint	8
Mise en place de l'algorithme	10
3. Résultats numériques	11

1. Présentation du problème

Le but du TP est de résoudre un problème de contrôle optimal appliqué à l'équation de la chaleur. Cette résolution se situe dans un domaine Ω avec des conditions de Dirichlet et de Neumann au bord de ce domaine, noté $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$



Le problème à résoudre est alors le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_n \end{array} \right. \quad \text{avec } u=u(g) \text{ et } g=g(x)$$

où u désigne la température et g le contrôle.

On souhaite alors trouver la température u tel que celle-ci soit égale à une température donnée u_0 .

On introduit alors la fonctionnelle J définie par:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} g^2$$

ε représente le compromis efficacité-coût. Plus il est grand, plus les économies d'énergie sont importantes.

On cherche alors à minimiser J et on note \bar{g} l'unique minimum de J :

$$\bar{g} = \arg \min_g J(g)$$

$$J(\bar{g}) = \min_g J(g)$$

Le problème revient alors à trouver $u \in H^1_{0,\Gamma_d}$ tel que $\forall v \in H^1_{0,\Gamma_d}$,

$$\int_{\Omega} -\Delta uv = 0$$

soit
$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma_n} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$$

On arrive alors à la formulation relationnelle suivante:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Gamma_n} g v$$

On a $V_h \subset H^1_{0,\Gamma_d}$ de dimension finie.

On suppose le problème de dimension finie et dans la suite, on continuera à noter V et H les sous espaces de dimension finie de H^1_{0,Γ_d} et $L^2_{(\Gamma_n)}$.

Pour minimiser la fonctionnelle J , il faut tout d'abord effectuer l'opération de dérivation sur celle-ci. On introduit pour cela la dérivée de Gâteaux définie comme suit:

$$J'(g, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(g + th) - J(g)}{t}$$

Commençons par calculer $J(g + th)$:

$$J(g + th) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g + th) - u_0|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} (g + th)^2$$

Comme $g \rightarrow u(g)$ est linéaire, on a $u(g + th) = u(g) + tu(h)$.

On a donc:

$$J(g + th) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0 + tu(h)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} g^2 + t^2 h^2 + 2thg$$

$$J(g + th) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0|^2 + t^2 \|u(h)\|^2 + 2t(u(g) - u_0)u(h) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} g^2 + t^2 h^2 + 2thg$$

D'où

$$\frac{J(g + th) - J(g)}{t} = \int_{\Omega} (u(g) - u_0)u(h) + \varepsilon \int_{\Gamma_n} hg + t(\dots)$$

On passe alors à la limite et on fait tendre t vers 0. On obtient alors la dérivée de J :

$$J'(g, h) = \int_{\Omega} (u(g) - u_0)u(h) + \varepsilon \int_{\Gamma_n} gh$$

Pour résoudre le problème de l'équation de la chaleur, on utilise la méthode itérative du gradient:

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} - \rho \nabla J(g^{(n)}) \text{ avec } \rho > 0$$

On a:

$$\begin{aligned} J'(g, h) &= \langle \nabla J(g), h \rangle \\ &= \int_{\Gamma_n} \nabla J(g) \cdot h \end{aligned}$$

Méthode de l'état adjoint


Pour représenter correctement le gradient, on a besoin de transformer \int_{Ω} en \int_{Γ_n} .

On utilise pour cela la méthode de l'état adjoint: on introduit donc la variable p vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p = f & \text{dans } \Omega \\ p = ? & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial p}{\partial n} = ? & \text{sur } \Gamma_n \end{array} \right.$$

On réécrit alors la formulation variationnelle et on détermine les conditions au bord du domaine en comparant la formulation variationnelle obtenue avec celle du problème initial.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta p u(h) &= \int_{\Omega} f u(h) \\ \int_{\Omega} \nabla p \nabla u(h) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} u(h) &= \int_{\Omega} f u(h) \\ - \int_{\Omega} p \Delta u(h) + \int_{\partial\Omega} p \frac{\partial u(h)}{\partial n} - u(h) \frac{\partial p}{\partial n} &= \int_{\Omega} f u(h) \\ \int_{\Gamma_n} p h + \int_{\Gamma_d} p \frac{\partial u(h)}{\partial n} - \int_{\Gamma_n} u(h) \frac{\partial p}{\partial n} &= \int_{\Omega} f u(h) \end{aligned}$$



On effectue ici une double intégration par parties

La comparaison avec le problème initial donne alors:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p = u(g) - u_0 & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_n \end{array} \right.$$

On obtient ainsi:

$$\int_{\Gamma_n} p h = \int_{\Omega} (u(g) - u_0) u(h) \quad \text{où } p \text{ désigne l'état adjoint.}$$

La dérivée de Gâteau est alors définie dans ce cas par $J'(g, h) = \int_{\Gamma_n} \nabla J(g) \cdot h$ où $\nabla J(g) = p + \varepsilon g$

Mise en place de l'algorithme

On se donne $g^{(0)}$ ($= 0$ par exemple), puis on résout pour $i=0, 1, \dots$ le problème direct, ainsi que le problème adjoint:

Problème direct	Problème adjoint
$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$	$\begin{cases} -\Delta p^{(i)} = u^{(i)} - u_0 \\ p^{(i)} = 0 \\ \frac{\partial p^{(i)}}{\partial n} = 0 \end{cases}$

On a :

$$g^{(i+1)} = g^{(i)} - \rho \nabla J(g^{(i)})$$

avec $\nabla J(g^{(i)}) = p^{(i)} + \varepsilon g^{(i)}$

En dimension 1, on a :

$$\begin{cases} \Omega =]0, 1[\\ \Gamma_n = \{0\} \\ \Gamma_d = \{1\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -u'' = f \\ u'(0) = a \\ u(1) = b \end{cases}$$

On pose alors :

$$x_i = (i-1)h \text{ et on définit le pas d'espace par } h = \frac{1}{N}.$$

On peut alors discrétiser le problème précédent.

$$-u''(x_i) = \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2}$$

On a donc:

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \quad \text{pour } 2 \leq i \leq N-1$$

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - b}{h^2} = f(x_i) \quad \text{pour } i = N$$

$$\frac{u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) - \frac{a}{h} \quad \text{pour } i = 1$$

Le problème revient donc à résoudre le système matriciel $AU = F$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \\ & \dots & \dots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{a}{h} \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}$$

La solution est obtenue en utilisant la factorisation LU puis la méthode de descente et remontée. La même méthode permet de résoudre le problème adjoint.

2. Méthode de contrôle optimal avec le temps.

On introduit maintenant le temps dans la résolution de l'équation de la chaleur. La température u dépend donc désormais de 2 variables: $u = u(x, t)$ avec $x \in]0, 1[$ et $t \in]0, T[$.

Le problème est alors le suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t) \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

On introduit alors la fonctionnelle suivante:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \int_{x=0}^1 |u(g) - u_0|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{t=0}^T g^2(t) dt$$

Le calcul de la dérivée de Gâteaux donne le résultat suivant:

$$J'(g, h) = \int \int_{t \ x} (u(g) - u_0) u(h) + \varepsilon \int_t gh$$

Méthode de l'état adjoint

De la même façon que pour le problème de contrôle optimal sans le temps, on introduit le problème adjoint suivant dont on va déterminer les conditions aux bords du domaine:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u(g) - u_0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = ? \\ p(1, t) = ? \\ p(x, T) = ? \end{cases}$$

Déterminons la formulation variationnelle de ce problème:

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) u(h) &= \int_{t,x} (u(g) - u_0) u(h) = A \\ \int_t \int_x p \frac{\partial u(h)}{\partial t} - \int_{x,t=1} p u(h) + \int_{x,t=0} p u(h) + \int_t \int_x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u(h)}{\partial x} - \int_{t,x=1} \frac{\partial p}{\partial x} u(h) + \int_{t,x=0} \frac{\partial p}{\partial x} u(h) &= \int_{t,x} (u(g) - u_0) u(h) \\ \int_t \int_x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u(h)}{\partial x} &= - \int_t \int_x p \frac{\partial^2 u(h)}{\partial x^2} + \int_{t,x=1} p \frac{\partial u(h)}{\partial x} - \int_{t,x=0} p \frac{\partial u(h)}{\partial x} \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u(g) - u_0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = 0 \\ p(1, t) = 0 \\ p(x, T) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et } A = - \int_{t=0}^T p(0, t) h(t)$$

En posant $\bar{p}(x, t) = p(x, T - t)$ le problème adjoint devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} = u(g)(x, T - t) - u_0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \bar{p}(1, t) = 0 \\ \bar{p}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Mise en place de l'algorithme

On va résoudre le problème direct ainsi que le problème adjoint, sachant que l'on a :

$$g^{(i+1)}(t) = g^{(i)}(t) - \rho \nabla J(g^{(i)})$$

avec $\nabla J(g^{(i)}) = p^{(i)}(0, T-t) + \varepsilon g^{(i)}(t)$

Problème direct

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}(0, t) = g^{(i)}(t) \\ u^{(i)}(1, t) = 0 \\ u^{(i)}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Problème adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial x^2} = u^{(i)}(x, T-t) - u_0 \\ \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x}(0, t) = 0 \\ p^{(i)}(1, t) = 0 \\ p^{(i)}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

En dimension 1, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = b(t) \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

On définit les pas d'espace et de temps:

$$x_i = (i-1)h \text{ et } t_n = n\tau \text{ avec } \tau = \frac{T}{p} \text{ pour } i=1..N \text{ et } n=0..p.$$

On passe ensuite à la discrétisation du problème en espace et en temps avec la condition

$\tau \leq ch^2$ pour un schéma explicite. On a alors:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{2u_i^n - u_{i-1}^n - u_{i+1}^n}{h^2}$$

et $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}$

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{2u_i^n - u_{i-1}^n - u_{i+1}^n}{h^2} = a(x_i, t_n) \quad \text{pour } 2 \leq i \leq N+1$$

$$\text{D'où } \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2} = a(x_i, t_n) - \frac{b(t_n)}{h} \quad \text{pour } i = 1$$

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{2u_i^n - u_{i-1}^n}{h^2} = a(x_i, t_n) \quad \text{pour } i = N$$

Le problème revient donc à résoudre le système matriciel suivant:

$$\frac{1}{\tau}U^n - \frac{1}{\tau}U^{n-1} + \frac{1}{h^2}AU^n = F^n$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \\ & \dots & \dots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N^n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F^n = \begin{bmatrix} a(x_1, t_n) - \frac{b(t_n)}{h} \\ \dots \\ a(x_i, t_n) \\ \dots \end{bmatrix}$$

Le système matriciel peut encore être écrit sous la forme:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\tau}I + \frac{1}{h^2}A \right) U^n = F^n + \frac{1}{\tau}U^{n-1}}$$

On résout ce système de la même façon que précédemment, c'est-à-dire en utilisant la factorisation LU puis la méthode de descente et remontée.

3. Résultats numériques

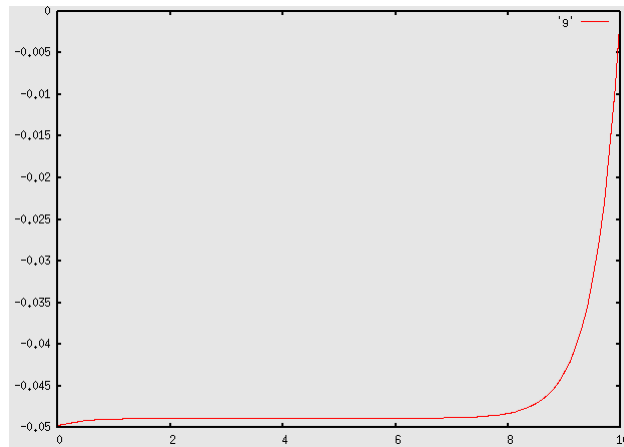
Pour tester le programme, différents paramètres ont été modifiés.

Tout d'abord, le paramètre ε : celui-ci est représentatif du compromis coût-efficacité. Plus il est important, plus les économies d'énergie sont importantes.

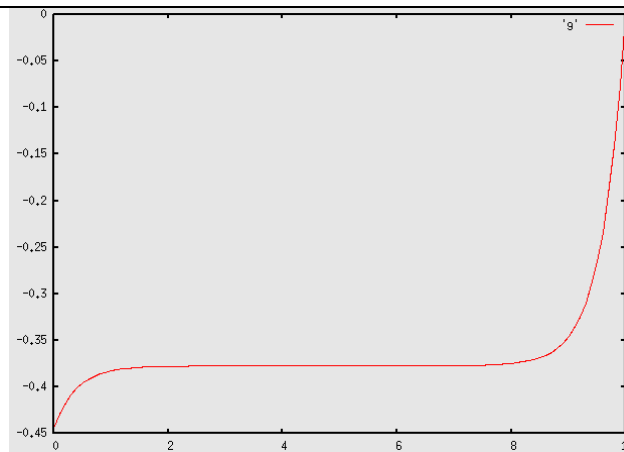
On a donc pris différentes valeurs de ε pour une valeur de ρ fixée à une valeur de 0,01.

Voici les résultats obtenus:

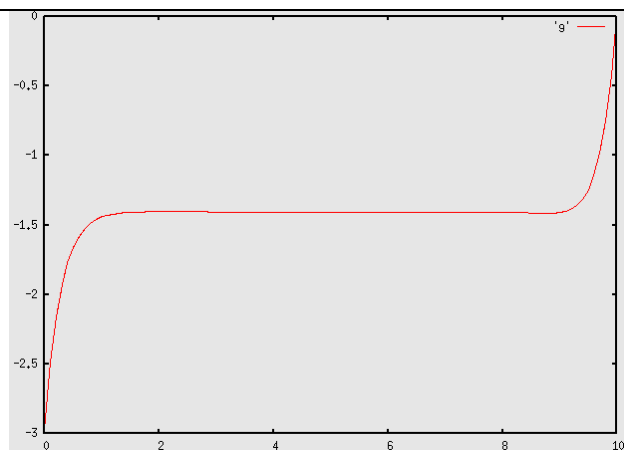
$\varepsilon = 10$



$\varepsilon = 1$



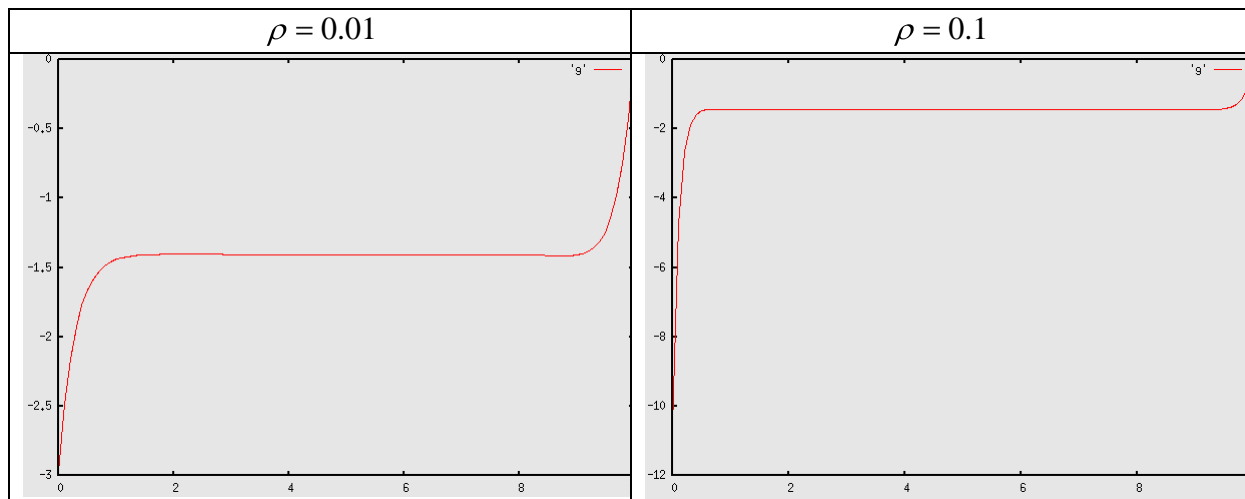
$\varepsilon = 0.01$



On peut donc remarquer que pour une valeur de ρ fixée, lorsque l'on fait tendre ε vers 0, le contrôle optimal g tend vers l'infini.

On fixe maintenant la valeur de ε à 0.01 par exemple, et on change la valeur de ρ .

Voici les résultats obtenus:



On peut remarquer que lorsque ρ augmente, le contrôle optimal g converge plus vite, s'il converge. En effet, si on prend une valeur de ε trop grande, alors g ne converge pas.